

Correction Devoir maison n°11

Exercice 1 - Obligatoire pour les groupes 5 à 10

On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = xe^{x^2-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. L'ensemble de définition de la fonction f , \mathbb{R} est symétrique. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -xe^{(-x)^2-1} = -xe^{x^2-1} = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire.

Graphiquement, la courbe représentative de f admet le point O comme centre de symétrie.

2. On sait que

- La fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} .
- La fonction $X \rightarrow e^X$ est dérivable sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \rightarrow x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Par produit et composée de fonctions dérivables,

 f est dérivable sur \mathbb{R} .

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2-1} + 2x^2e^{x^2-1} \\ &= (1 + 2x^2)e^{x^2-1} \end{aligned}$$

3. La dérivée est positive pour tout x réel.


La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} .

4. On calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$+\infty$



5. On résout pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\begin{aligned}
 f(x) - x = 0 &\iff xe^{x^2-1} - x = 0 \\
 &\iff x(e^{x^2-1} - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{x^2-1} - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{x^2-1} = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$$

6. On résout l'inéquation $f(x) - x > 0$ à l'aide d'un tableau de signe. On résout alors l'inéquation

$$\begin{aligned}
 e^{x^2-1} - 1 > 0 &\iff e^{x^2-1} > 1 \\
 &\iff x^2 - 1 > 0 \\
 &\iff (x - 1)(x + 1) > 0 \\
 &\iff x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.
 \end{aligned}$$

d'où le tableau de signe de f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Signe de x	-	-	0	+	+
Signe de $e^{x^2-1} - 1$	+	0	-	0	+
Signe de $f(x) - x$	-	0	+	0	+

7. La fonction f est dérivable au point $x = 0$ et $f'(0) = e^{-1}$ et $f(0) = 0$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en $x = 0$ et

$$f(x) = xe^{-1} + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

8. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 0. On tracera sur le même graphique la droite d'équation $y = x$.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f .

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; 1[$.

(a) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{u_n \in]0; 1[\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 \in]0; 1[$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\implies f(0) \geq f(u_n) \geq f(1) && \text{La fonction } f \text{ est croissante} \\ &\implies 0 \geq u_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]}$$

- (b) On a montré précédemment que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - x < 0$. Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

- (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone,

$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. De plus la suite (u_n) est convergente. Notons ℓ sa limite. En appliquant le théorème du point fixe, on a nécessairement

$$\ell = f(\ell) \iff f(\ell) - \ell = 0$$

D'après la question 5, on sait que les solutions de cette équations sont $\ell = -1$, $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$ donc la solution $\ell = -1$ est impossible. Supposons que $\ell = 1$. Comme la suite est décroissante $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde. Donc $\ell \neq 1$ et finalement

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

2. On suppose enfin que $u_0 > 1$.

- (a) On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{u_n > 1\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 > 1$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\implies f(u_n) > f(1) && \text{La fonction } f \text{ est croissante} \\ &\implies u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1}$$

- (b) On a vu à la question 6 que pour tout $x > 1$, $f(x) - x > 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. On a alors

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est alors croissante.}}$

- (c) Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ . La suite étant croissante, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$. D'autre part, la fonction f étant continue sur $]1; +\infty[$, le théorème du point fixe impose que ℓ vérifie l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell \in \{-1; 0; 1\}$$

Les solutions sont toutes impossibles et il y a donc une absurdité.

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

3. Dans cette question $u_0 = e$. Écrire un programme Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{20}$.

```

u = %e
n = 0
while u < 10^(20)
    u = u * exp(u^2 - 1)
    n = n + 1
end
disp(n)

```

Exercice 2 - Obligatoire pour tous les groupes

On considère les fonctions f et g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On a $g(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) - x$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

On a également

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} g(x) = +\infty.$$

2. La fonction g est dérivable pour tout $x \in]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$,

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{1}{2x} - 1 = -\frac{1+2x}{x} < 0$$

On a alors le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$:

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de f	$+\infty$ $-\infty$	

3. On a les assertions suivantes :

- La fonction g est continue sur $]0; +\infty[$ (on a montré qu'elle est dérivable sur $]0; +\infty[$).
- La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Enfin $0 \in g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]0; +\infty[.}$$

On la note α .

4. On sait que $g(1) = 2 - 0 - 1 = 1 > 0$ et $g(e) = 2 - \frac{1}{2} - e = 1,5 - e < 0$. D'après le théorème de Bolzano, la solution de $g(x) = 0$ est dans $[1, e]$. De plus $g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$. On a bien

$$\boxed{\alpha \in [1, e] \text{ et } f(\alpha) = \alpha.}$$

5. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]0; +\infty[$. On a

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{2x} < 0}$$

On observe que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0; +\infty[.}$$

6. On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{1 \leq u_n \leq e\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in [1, e]$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq e &\implies f(1) \geq f(u_n) \geq f(e) && \text{La fonction } f \text{ est décroissante} \\ &\implies 2 \geq u_{n+1} \geq 2 - \frac{1}{2} \\ &\implies e \geq u_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1}$$

7. Pour tout $x \in [1, e]$, $|f'(x)| = \frac{1}{2x}$. Or, $x \geq 1 \iff \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.}$$

8. La fonction f est dérivable sur $[1; e]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. De plus $u_n \in [1; e]$ (question 6) et $\alpha \in [1; e]$ (question 4). En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f(u_n) - f(\alpha)| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \\ \iff |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \end{aligned}$$

9. On montre par récurrence les propositions :

$$\mathcal{P}_n = \{|u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}\}.$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\alpha \in [1, e]$ donc $|u_0 - \alpha| = \alpha - u_0 \leq e - 1$. La proposition \mathcal{P}_0 est donc vraie.

Hérédité : On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| && \text{d'après la question précédente} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2} \times \frac{e-1}{2^n} && \text{hypothèse de récurrence} \\ \implies |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{e-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

Conclusion : On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}}$$

10. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{2^n} = 0$$

En appliquant le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.}$$

11. **Étude Scilab.**

- (a) Écrire une fonction Scilab prenant en argument d'entrée un nombre réel x et permettant de calculer $f(x)$.

```
function y = f(x)
    y = 2 - 1/2 * log(x)
endfunction
```

- (b) Écrire un script permettant de tracer avec Scilab la fonction f entre 1 et e . (On prendra un minimum de 1000 points pour tracer la courbe)

```
x = linspace(1, exp(1), 1000)
plot(x, f)
```

- (c) Écrire une fonction Scilab prenant en argument d'entrée un entier n et donnant le résultat de u_n .

```
function y = u(n)
    y = 1
    for k = 1:n
        y = f(y)
    end
endfunction
```

(d) La question 9 nous donne l'inégalité suivante,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}$$

Or si $n = \left\lfloor \frac{\ln(10^5(e-1))}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$, alors

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\ln(10^5(e-1))}{\ln(2)} \implies n \ln(2) \geq \ln(10^5(e-1)) \\ &\implies \ln(2^n) \geq \ln(10^5(e-1)) \\ &\implies 2^n \geq 10^5(e-1) \\ &\implies \frac{2^n}{e-1} \geq 10^5 \\ &\implies \frac{e-1}{2^n} \leq 10^{-5} \\ &\implies \boxed{|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}} \end{aligned}$$

(e) Écrire un script permettant de déterminer (en utilisant la suite (u_n)) une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

```
n = floor( log((10^5)*(%e - 1)) / log(2) ) + 1
disp(u(n))
```

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 4

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Etude des variations de la fonction f_a

- On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}t = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) = +\infty$.

De plus, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_a(t) - \frac{1}{2}t = 0.$$

Et comme $\frac{1}{2} \frac{a^2}{t} > 0$ alors la courbe représentative de f_a est au dessus de l'asymptote.

- En 0^+ : $f_a(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right) \rightarrow +\infty$.

Et on a donc une asymptote verticale d'équation $t = 0$.

- f_a est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables et

$$f'_a(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{t^2 - a^2}{t^2}$$

t	0	a	$+\infty$
$t^2 - a^2$		- 0 +	2^{nd} degré
$f'_a(t)$		- 0 +	
$f_a(t)$	$+\infty$	\searrow a \nearrow	$+\infty$

4. Comme f_a est minimum en a alors

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall t > 0 : f_a(t) \geq f_a(a) = a}$$

Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Dans le cas où $u_0 = a$, comme $f_a(a) = a$, on aura (par récurrence), $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. On a $f'_a(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{t^2}$ et comme $\frac{a^2}{t^2} > 0$ alors $f'_a(t) < \frac{1}{2}$

et pour tout $t > a : f'_a(t) > 0$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall t > a : 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}}$$

3. Par récurrence :

— $u_1 \geq f_a(u_0) \geq a$ car $f_a(t) \geq a$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

— Soit $n \geq 1$ tel que $u_n \geq a$ alors $f_a(u_n) \geq f_a(a)$ car f_a est strictement croissante sur $[a, +\infty[$.

On en déduit alors que $u_{n+1} \geq a$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a}$$

4. On utilise alors l'inégalité des accroissements finis, soit avec la valeur absolue et en s'en débarrassant ensuite, soit sans la valeur absolue :

— $\forall t \geq a : 0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a$ donc $0 \cdot (u_n - a) \leq f_a(u_n) - f_a(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$

— $\forall t \geq a : 0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}$ donc $|f'_a(t)| \leq \frac{1}{2}$ et $|f_a(u_n) - f_a(a)| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$ et comme $u_n - a \geq 0$ alors $|u_n - a| = u_n - a$

(la première est plus cohérente avec l'énoncé qui ne demande qu'ensuite la valeur absolue)

$$\text{Conclusion : } \boxed{0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

et comme $u_n - a \geq 0$ alors $|u_n - a| = u_n - a$ et par récurrence :

— $|u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_1 - a|$

— Soit $n \geq 1$ tel que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ alors $|u_{n+1} - a| = u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a) \leq$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \geq 1 : |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|}$$

5. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ et par encadrement ($0 \leq |u_n - a|$) $|u_n - a| \rightarrow 0$

$$\text{Conclusion : } \boxed{u_n \rightarrow a \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$$

6. La suite précédente convergera vers $\sqrt{2}$ si $a = \sqrt{2}$ et $a^2 = 2$

Avec $u_0 = 1$. On affiche les termes de u_0 à u_{99} .

```
>> u = zeros(1,100)
>> u(1) = 1
>> for k = 1:99
>>     u(k+1) = (1/2)*(u(k) + 2/(u(k)))
>> end
>> disp(u)
```